Les probabilités durant un match de hockey

par Alain Bonnier, D.Sc.(physique)

1. La probabilité de compter k buts durant un match de hockey

La probabilité $p(\lambda, k)$ qu'une équipe de hockey ayant une *moyenne offensive* λ de buts par match, compte k buts durant un match, obéit à la distribution de Poisson :

$$p(\lambda, k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad \text{(Éq 1)}$$

où e = 2,71828... et où
$k! = k \times (k-1) \times (k-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

Un exemple de cette distribution est illustré à la Figure 1 ci-contre pour $\lambda = 3$.

Comme $p(\lambda, k) < 10^{-6}$ si $k > 9$, nous supposerons par la suite que $p(\lambda, k) \approx 0$ quand les valeurs de k seront supérieures à 9.

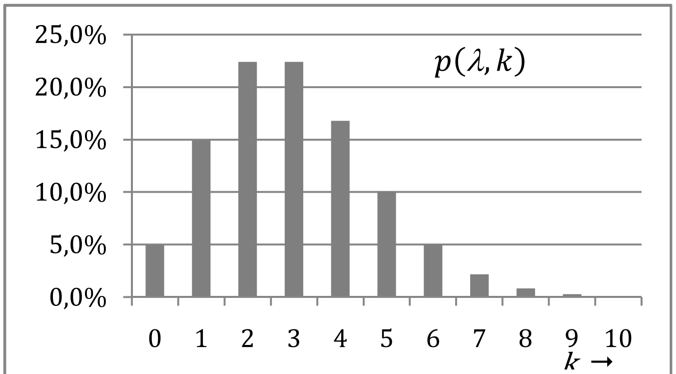

Figure 1. Probabilité $p(\lambda, k)$ de compter k buts (selon l'Éq 1) lors d'un match de hockey par une équipe dont la moyenne offensive $\lambda = 3$.

La probabilité $p_E(\lambda_E, k, t)$ au temps t (exprimé en secondes écoulées depuis le début du match) qu'une équipe E compte <u>exactement</u> k buts d'ici la fin d'un match d'une durée T = 3600 secondes, est :

$$p_E(\lambda_E, k, t) = \frac{[\lambda_E(1 - t/T)]^k e^{-\lambda_E(1-t/T)}}{k!} \qquad \text{(Éq 2)}$$

où λ_E est la *moyenne offensive* de buts comptés par match *Par* une équipe E quand elle joue à forces égales (5 attaquants contre 5) contre une équipe D, selon la relation :

$$\lambda_E = \tfrac{1}{2}(\lambda_{PE} + \lambda_{CD}) \qquad \text{(Éq 3)}$$

où λ_{PE} est la moyenne de buts comptés par match *Par* l'équipe E contre toutes les équipes de la Ligue quand elle joue à 5 contre 5 et λ_{CD} est la moyenne de buts comptés par match *Contre* l'équipe D par toutes les équipes de la Ligue.

Exemple : Dans le cas d'une équipe E dont la moyenne offensive λ_E serait égale à 3, l'évolution de la probabilité $p_E(\lambda_E, k, t)$ en fonction du temps t de compter exactement k buts d'ici la fin d'un match d'une durée T= 60 minutes, est illustrée à la Figure 2, pour k= 0 à 6.

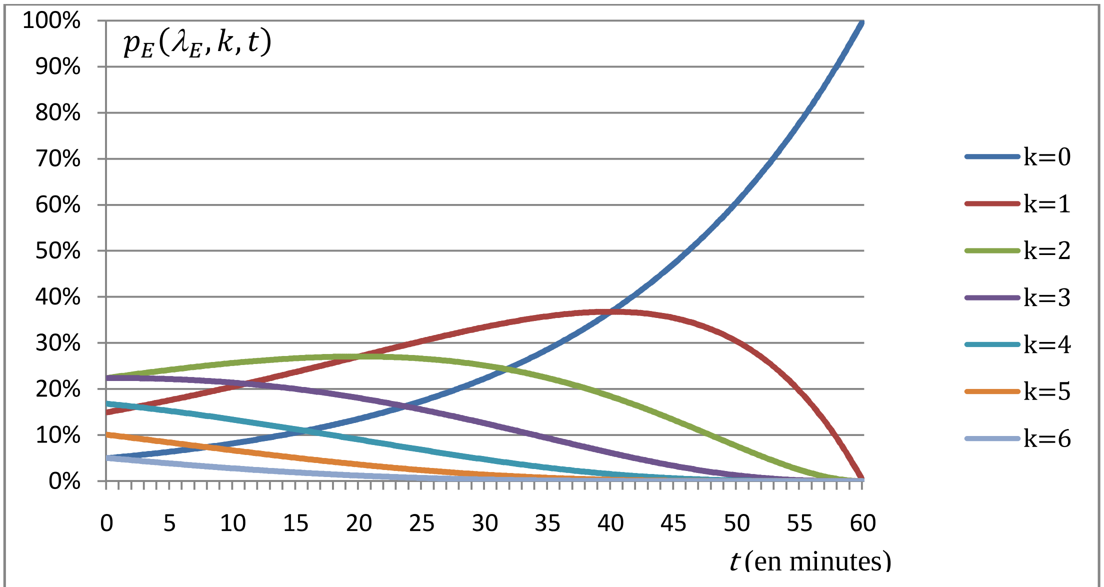

Figure 2. Probabilité $p_E(\lambda_E, k, t)$ en fonction du temps t (selon l'Éq 2) qu'une équipe E compte exactement k buts d'ici la fin d'un match de hockey si $\lambda_E = 3$.

De même, la *moyenne offensive* λ_D de buts comptés par match par l'équipe D est :

$$\lambda_D = \frac{1}{2}(\lambda_{CE} + \lambda_{PD}) \qquad \text{(Éq 4)}$$

où λ_{CE} est la moyenne de buts comptés par match *Contre* l'équipe E quand elle joue à 5 contre 5 et λ_{PD} est la moyenne de buts comptés par match *Par* l'équipe adverse D quand elle joue à 5 contre 5.

Et la probabilité $p_D(\lambda_D, k, t)$ au temps t qu'une équipe D compte k buts d'ici la fin d'un match est :

$$p_D(\lambda_D, k, t) = \frac{[\lambda_D(1 - t/T)]^k e^{-\lambda_D(1-t/T)}}{k!}. \qquad \text{(Éq 5)}$$

2. Les moyennes de buts comptés

Les moyennes λ_{PE} , λ_{CE} , λ_{PD} et λ_{CD} sont obtenues à partir des statistiques d'équipes de la saison en cours. Pour donner un plus grand poids aux matchs plus récents par rapport aux matchs plus anciens, ces moyennes sont lissées exponentiellement selon la relation :

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + (b - \lambda_i)/N \qquad \text{(Éq 6)}$$

où λ_{i+1} est la moyenne de buts comptés ***Par*** xou(*) ***Contre*** une équipe donnée, après le $(i+1)^{\text{ème}}$ match joué (soit à ***Domicile*** xou à l'***Extérieur,*** pendant le temps où elle joue à 5 contre 5), λ_i est la moyenne après le $i^{\text{ème}}$ match, b est le nombre de buts comptés (***Par*** xou ***Contre*** cette équipe) lors du $i^{\text{ème}}$ match et N est le nombre de matchs caractéristique du lissage exponentiel. En fixant arbitrairement ce nombre N à 10, on donne 10% d'importance dans la moyenne au dernier match, 9% à l'avant dernier match, 7,2% à l'avant avant dernier match, etc. Au total, on donne ainsi 90% d'importance aux matchs précédents, en poids décroissant vers le passé. En début de saison, le faible nombre de matchs joués par chaque équipe fait que les moyennes par équipe ne sont pas fiables, on assigne alors à chaque équipe une moyenne λ_0 de départ, égale à la moyenne des équipes de la ligue à leur premier match. On applique ensuite l'Éq 6 pour le calcul des moyennes subséquentes. On trouvera à l'Annexe 1, les tableaux indiquant les différentes moyennes et probabilités obtenues à partir des données statistiques des équipes et employées dans le calcul des probabilités durant un match.

(*) "xou" est le "ou" exclusif booléen, traduction française de "xor".

3. Probabilité que l'équipe E gagne quand le score est égal au temps t

Si le score est égal au temps t et que les forces en présence sont *Régulières* (5 attaquants contre 5), alors la probabilité $P_{EGR}(0,t)$ pour l'équipe E de *Gagner* est :

$$P_{EGR}(0,t) = \sum_{k=1}^{9} \sum_{j=0}^{k-1} p_E(\lambda_E, k, t) p_D(\lambda_D, j, t) + P_{ENR}(0,t) P_{EGP} \qquad \text{(Éq 7)}$$

où

$$P_{ENR}(0,t) = \sum_{k=0}^{9} p_E(\lambda_E, k, t) p_D(\lambda_D, k, t) \qquad \text{(Éq 8)}$$

est la probabilité que le score soit égal après T secondes de jeu et

$$P_{EGP} = (1 - p_{EP0} p_{DP0}) p_{EP1} + p_{EP0} p_{DP0} P_{EGF} \qquad \text{(Éq 9)}$$

est la probabilité que l'Équipe E gagne en *Prolongation*.

Le 0 qui apparaît dans la fonction $P_{EGR}(0,t)$ est là pour fins de généralisation de la fonction $P_{EGR}(\Delta b, t)$: il correspond à la différence de buts Δb entre l'équipe E et *D.*

Les données p_{EP0} et p_{DP0} sont les probabilités statistiques que les équipes E et D ne comptent aucun but durant la période de prolongation d'une durée $T_P = 300$ secondes.

Le ratio

$$p_{EP1} = \frac{1 - p_{EP0}}{(1 - p_{EP0}) + (1 - p_{DP0})} \qquad \text{(Éq 10)}$$

est la probabilité, si un but est compté durant la prolongation, que ce but appartienne à l'équipe *E.*

La probabilité P_{EGF} que l'équipe *E Gagne* en *Fusillade* est donnée par

$$P_{EGF} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=0}^{r-1} \binom{3}{r} \binom{3}{s} p_{EF}^{r}\, q_{EF}^{3-r} p_{DF}^{s} q_{DF}^{3-s} + P_{EGX} \sum_{r=0}^{3} \binom{3}{r}^2 p_{EF}^{r} q_{EF}^{3-r} p_{DF}^{r} q_{DF}^{3-r} \qquad \text{(Éq 11)}$$

où

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!} \qquad \text{(Éq 12)}$$

est la *Combinaison* de n objets, r à la fois et où

$$p_{EF} = \frac{1}{2}(p_{PEF} + p_{CDF}) \quad \text{(Éq 13)}$$
$$p_{DF} = \frac{1}{2}(p_{PDF} + p_{CEF}) \quad \text{(Éq 14)}$$

sont les *probabilités pondérées* que les équipes E et D comptent un but lors d'un tir en *Fusillade*, alors que p_{PEF}, p_{CEF}, p_{PDF} et p_{CDF} sont les probabilités statistiques respectives de compter un but *Par* et *Contre* l'équipe E et D en *Fusillade.*

Pour alléger l'écriture de l'Éq 11, on a défini :

$$q_{EF} = 1 - p_{EF} \quad \text{(Éq 15)}$$
$$q_{DF} = 1 - p_{DF}\ . \quad \text{(Éq 16)}$$

Le terme P_{EGX} qui apparaît dans l'Éq 11, est la probabilité que l'équipe *E Gagne* si les 3 premiers tirs en *Fusillade* de chaque côté ont donné un score égal. Cette probabilité est :
:

$$P_{EGX} = \frac{p_{EF}q_{DF}}{1 - p_{EF}p_{DF} - q_{EF}q_{DF}}\ . \quad \text{(Éq 17)}$$

La probabilité $P_{DGR}(0,t)$ que l'équipe adverse D gagne le match est complémentaire à $P_{EGR}(0,t)$, soit :

$$P_{DGR}(0,t) = 1 - P_{EGR}(0,t). \quad \text{(Éq 18)}$$

On peut obtenir les expressions équivalentes aux Éq 7 à 17 pour l'équipe *D,* en permutant partout les indices $_E$ et $_D$ dans ces équations.

4. Probabilité que l'équipe E gagne si elle est en avance au temps t

Si l'équipe E a b buts d'avance sur l'équipe D au temps t et que les forces en présences sont *Régulières* (5 attaquants contre 5), alors la probabilité $P_{EGR}(b,t)$ pour l'équipe E de *Gagner* est :

$$P_{EGR}(b,t) = \sum_{k=0}^{9} \sum_{j=0}^{k+b-1} p_E(\lambda_E, k, t) p_D(\lambda_D, j, t) + P_{ENR}(b,t) P_{EGP} \qquad \text{(Éq 19)}$$

où

$$P_{ENR}(b,t) = \sum_{k=0}^{9} p_E(\lambda_E, k, t) p_D(\lambda_D, k+b, t) \qquad \text{(Éq 20)}$$

avec P_{EGP} identique à l'Éq 9 :

$$P_{EGP} = (1 - p_{EP0} p_{DP0}) p_{EP1} + p_{EP0} p_{DP0} P_{EGF} \,. \qquad \text{(Éq 9)}$$

5. Probabilité que l'équipe E gagne si elle tire de l'arrière au temps t

Si l'équipe E tire de l'arrière par a buts sur l'équipe D au temps t alors que les forces en présences sont *Régulières* (5 attaquants contre 5), alors la probabilité $P_{EGR}(-a,t)$ pour l'équipe E de *Gagner* est :

$$P_{EGR}(-a,t) = \sum_{k=a+1}^{9} \sum_{j=0}^{k-1} p_E(\lambda_E,k,t)p_D(\lambda_D,j,t) + P_{ENR}(-a,t)P_{EGP} \qquad \text{(Éq 21)}$$

où

$$P_{ENR}(-a,t) = \sum_{k=0}^{9} p_E(\lambda_E,k+a,t)p_D(\lambda_D,k,t) \qquad \text{(Éq 22)}$$

avec P_{EGP} toujours identique à l'Éq 9 :

$$P_{EGP} = (1 - p_{EP0}p_{DP0})p_{EP1} + p_{EP0}p_{DP0}P_{EGF}\ . \qquad \text{(Éq 9)}$$

6. Probabilité de compter en supériorité numérique

La probabilité statistique p_{E054} pour l'équipe E de <u>ne pas compter</u> de but durant une période de pénalité mineure $T_X = 120\text{s}$ où elle est en *Supériorité* numérique à 5 attaquants contre 4, s'obtient directement des statistiques de l'équipe.

L'évolution dans le temps de cette probabilité pour l'équipe E de ne compter aucun but durant la période T_X, est

$$p_{ES}(0, t') = p_{E054}^{(1-t'/T_X)} \qquad \text{(Éq 23)}$$

alors que la probabilité de compter un but durant cette période T_X est

$$p_{ES}(1, t') = 1 - p_{E054}^{(1-t'/T_X)} \qquad \text{(Éq 24)}$$

et où le temps t' est celui écoulé depuis le début de la *Supériorité* numérique survenue au temps t_X, soit

$$t' = t - t_X\ . \qquad \text{(Éq 25)}$$

La probabilité que l'équipe D, jouant en *Infériorité* numérique, compte 0 ou 1 but est respectivement :

$$p_{DI}(0, t') = p_{D045}^{(1-t'/T_X)} \qquad \text{(Éq 26)}$$

$$p_{DI}(1, t') = 1 - p_{D045}^{(1-t'/T_X)} \qquad \text{(Éq 27)}$$

où p_{D045}est la probabilité statistiqe que l'équipe D ne compte aucun but durant cette période T_X où elle joue en *Infériorité* numérique à 4 contre 5.

On peut poser

$$p_{ES}(-1, t') = p_{DI}(1, t') \qquad \text{(Éq 28)}$$

comme étant la probabilité que l'équipe E se fasse compter un but en supériorité numérique.

Dans le cas d'une pénalité *Majeure*, il faut remplacer dans les équations ci-dessus, la période $T_X = 120\text{s}$ par la période $T_Y = 300\text{s}$ et les probabilités statistiques p_{E054} et p_{D045} par

$$p_{E054M} = p_{E054}^{5/2} \qquad \text{(Éq 29)}$$

et

$$p_{D045M} = p_{D045}^{5/2}\ . \qquad \text{(Éq 30)}$$

Dans le cas d'une *Supériorité* numérique à 5 contre 3, il faut remplacer les probabilités statistiques p_{E054} et p_{D045} par p_{E053}et p_{D035} respectivement.

7. Probabilité de gagner lors d'une supériorité numérique

Le calcul de la probabilité $P_{EGS}(t)$ pour l'équipe E de *Gagner* lorsqu'elle est en *Supériorité* numérique (5 attaquants contre 4), dépend de la différence $b = B_E - B_D$ entre le nombre de buts B_E comptés par cette équipe E et celui B_D comptés par l'équipe adverse D au temps t_X, au moment où commence la période T_X de supériorité numérique :

$$P_{EGS}(t) = \sum_{i=-1}^{1} p_{ES}(i, t')P_{EGR}(b + i, t) \qquad \text{(Éq 31)}$$

où $p_{ES}(i, t')$ est donnée, pour $i = -1$ à 1, par les Éq 28, 23, 24 respectivement :
.

$$p_{ES}(-1, t') = 1 - p_{D045}^{(1-t'/T_X)} \qquad \text{(Éq 28)}$$

$$p_{ES}(0, t') = p_{E054}^{(1-t'/T_X)} \qquad \text{(Éq 23)}$$

$$p_{ES}(1, t') = 1 - p_{E054}^{(1-t'/T_X)} \qquad \text{(Éq 24)}$$

et $P_{EGR}(b + i, t)$ est donnée (toujours pour $i = -1$ à 1)

- par l'Éq 21 si l'équipe E a un retard $a = b + i$ après la période de supériorité,
- par l'Éq 7 si le score est égal après cette période,
- ou par l'Éq 19 si elle a une avance $c = b + i$ après cette période..

$$P_{EGR}(-a, t) = \sum_{k=a+1}^{9} \sum_{j=0}^{k-1} p_E(\lambda_E, k, t)p_D(\lambda_D, j, t) + P_{ENR}(-a, t)P_{EGP} \qquad \text{(Éq 21)}$$

$$P_{EGR}(0, t) = \sum_{k=1}^{9} \sum_{j=0}^{k-1} p_E(\lambda_E, k, t)p_D(\lambda_D, j, t) + P_{ENR}(0, t)P_{EGP} \qquad \text{(Éq 7)}$$

$$P_{EGR}(c, t) = \sum_{k=0}^{9} \sum_{j=0}^{k+c-1} p_E(\lambda_E, k, t)p_D(\lambda_D, j, t) + P_{ENR}(c, t)P_{EGP} \qquad \text{(Éq 19)}$$

8. Probabilité de compter en infériorité numérique

Dans le cas où l'équipe E se retrouve en *Infériorité* numérique (4 attaquants contre 5), il suffit de permuter les indices $_E$ et $_D$ dans la section précécente pour obtenir la probabilité de compter 0 ou 1 but par chacune de ces équipes durant la période T_X, soit :

$$p_{EI}(0,t') = p_{E045}^{(1-t'/T_X)} \qquad \text{(Éq 32)}$$

$$p_{EI}(1,t') = 1 - p_{E045}^{(1-t'/T_X)} \qquad \text{(Éq 33)}$$

$$p_{DS}(0,t') = p_{D054}^{(1-t'/T_X)} \qquad \text{(Éq 34)}$$

$$p_{DS}(1,t') = 1 - p_{D054}^{(1-t'/T_X)}. \qquad \text{(Éq 35)}$$

On peut poser également que

$$p_{EI}(-1,t') = p_{DS}(1,t'). \qquad \text{(Éq 36)}$$

Dans le cas d'une pénalité *Majeure*, il faut remplacer dans les équations ci-dessus, la période $T_X = 120\text{s}$ par la période $T_Y = 300\text{s}$ et les probabilités p_{E045} et p_{D054} par

$$p_{E045M} = p_{E045}^{5/2} \qquad \text{(Éq 37)}$$

et

$$p_{D054M} = p_{D054}^{5/2}\,. \qquad \text{(Éq 38)}$$

Dans le cas d'une *Infériorité* numérique à 3 contre 5, il faut remplacer dans les Éq 32 à 35, les probabilités p_{E045} et p_{D054} par p_{E035} et p_{D053} respectivement.

9. Probabilité de gagner lors d'une infériorité numérique

Le calcul de la probabilité $P_{EGI}(t)$ pour l'équipe E de *Gagner* lorsqu'elle est en *Infériorité* numérique (4 attaquants contre 5), dépend également de la différence $b = B_E - B_D$ entre le nombre de buts B_E comptés par cette équipe E et celui B_D comptés par l'équipe adverse D au temps t_X, au moment où commence la période T_X d'infériorité numérique.

$$P_{EGI}(t) = \sum_{i=-1}^{1} p_{EI}(i,t')P_{EGR}(b+i,t) \qquad \text{(Éq 39)}$$

et $P_{EGR}(b+i,t)$ par les Éq 21, 7, 19 pour $i = -1$ à 1,

$p_{EI}(i,t')$ est donnée, pour $i = -1$ à 1, par les Éq 36, 32, 33 respectivement :

$$p_{EI}(-1,t') = p_{DS}(1,t'). \qquad \text{(Éq 36)}$$

$$p_{EI}(0,t') = p_{E045}^{(1-t'/T_X)} \qquad \text{(Éq 32)}$$

$$p_{EI}(1,t') = 1 - p_{E045}^{(1-t'/T_X)} \qquad \text{(Éq 33)}$$

et $P_{EGR}(b+i,t)$ est donnée (toujours pour $i = -1$ à 1)

- par l'Éq 21 si l'équipe E a un retard $a = b + i$ après la période d'infériorité
- par l'Éq 7 si le score est égal après cette période,
- ou par l'Éq 19 si elle a une avance $c = b + i$ après cette période..

$$P_{EGR}(-a,t) = \sum_{k=a+1}^{9}\sum_{j=0}^{k-1} p_E(\lambda_E,k,t)p_D(\lambda_D,j,t) + P_{ENR}(-a,t)P_{EGP} \qquad \text{(Éq 21)}$$

$$P_{EGR}(0,t) = \sum_{k=1}^{9}\sum_{j=0}^{k-1} p_E(\lambda_E,k,t)p_D(\lambda_D,j,t) + P_{ENR}(0,t)P_{EGP} \qquad \text{(Éq 7)}$$

$$P_{EGR}(c,t) = \sum_{k=0}^{9}\sum_{j=0}^{k+c-1} p_E(\lambda_E,k,t)p_D(\lambda_D,j,t) + P_{ENR}(c,t)P_{EGP} \qquad \text{(Éq 19)}$$

10. Probabilité de gagner avec un filet vacant

Quand une équipe X tire de l'arrière par un ou même deux buts en fin de match, il peut être avantageux de risquer le tout pour le tout en retirant son gardien pour le remplacer par un sixième attaquant.

L'objectif premier de cette équipe est de créer l'égalité avant la fin du match. Cette probabilité est donnée par l'Éq 22 quand l'écart est de a buts :

$$P_{ENR}(-a,t) = \sum_{k=0}^{9} p_E(\lambda_X, k+a, t) p_D(\lambda_Y, k, t) \tag{Éq 22}$$

En fin de partie, les termes de la sommation de l'Éq 22 pour $k > 0$ deviennent négligeables. Par exemple, à $t=$ 3480s (soit à 2 minutes de la fin), pour $k = 1$, $a = 1$ et pour disons $\lambda_E = 3$, on a, suivant l'Éq 2 :

$$p_E(\lambda_E, k+a, t) = \frac{[\lambda_E(1-t/T)]^{k+a} e^{-\lambda_E(1-t/T)}}{(k+a)!} \tag{Éq 40}$$

$$p_E(3,2,3480) = \frac{[3 \times (1-3480/3600)]^2 e^{-3\times(1-3480/3600)}}{2!} = 0{,}5\% \tag{Éq 41}$$

Une fois multipliée par $p_D(3,0,3480) = 90\%$, on obtient pour le deuxième terme de la sommation, une valeur de 0,4%. Les termes supérieurs étant encore plus faibles, on peut donc se satisfaire, à moins de 0,5% près quand $t >$ 3480s, de l'approximation suivante

$$p_E(\lambda_E, 1, t) \approx [1 - p_E(\lambda_E, 0, t)] \tag{Éq 42}$$

et pour l'Éq 22 avec $a = 1$ et 2, respectivement :

$$P_{ENR}(-1,t) \approx [1 - p_E(\lambda_E, 0, t)]\, p_D(\lambda_D, 0, t) \tag{Éq 43}$$

$$P_{ENR}(-2,t) \approx [1 - p_E^2(\lambda_E, 0, t)]\, p_D(\lambda_D, 0, t) \tag{Éq 44}$$

Ou, plus explicitement :

$$P_{ENR}(-1,t) \approx \left(1 - e^{-\lambda_E^*}\right) e^{-\lambda_D^*} \tag{Éq 45}$$

et

$$P_{ENR}(-2,t) \approx \left(1 - e^{-2\lambda_E^*}\right) e^{-\lambda_D^*} \tag{Éq 46}$$

avec $\lambda_E^* = \lambda_E(1 - t/T)$ et $\lambda_D^* = \lambda_D(1 - t/T)$.

La probabilité P_{XNV} pour l'équipe X [(*)] d'annuler avec son filet vacant quand elle tire de l'arrière par 1 ou 2 buts est, respectivement :

$$P_{XNV}(-1,t) \approx \left(1 - e^{-\lambda_{XV}^*}\right) e^{-\lambda_{YV}^*} \qquad \text{(Éq 47)}$$

et

$$P_{XNV}(-2,t) \approx \left(1 - e^{-2\lambda_{XV}^*}\right) e^{-\lambda_{YV}^*} \qquad \text{(Éq 48)}$$

avec $\lambda_{XV}^* = \lambda_{XV}(1 - t/T)$ et $\lambda_{YV}^* = \lambda_{YV}(1 - t/T)$, et où

$$\lambda_{XV} = \tfrac{1}{2}(\lambda_{PXV} + \lambda_{CYV}) \qquad \text{(Éq 49)}$$

et

$$\lambda_{YV} = \tfrac{1}{2}(\lambda_{PYV} + \lambda_{CXV}) \qquad \text{(Éq 50)}$$

sont respectivement la *moyenne offensive* de compter un but *Par* l'équipe X avec son filet *Vacant* et la *moyenne offensive* de compter un but *Par* l'équipe Y jouant contre un filet *Vacant*. Les moyennes λ_{PXV}, $\lambda_{CXV,}$ λ_{PYV}, λ_{CYV} correspondent respectivement aux moyennes de buts comptés *Par* et *Contre* l'équipe X quand elle joue avec son filet *Vacant* et aux moyennes buts comptés *Par* et *Contre* l'équipe Y quand elle joue contre un filet *Vacant*.

La probabilité $P_{XGV}(-a,t)$ pour l'équipe X de *Gagner* avec un filet *Vacant* est donc :

$$P_{XGV}(-a,t) = P_{XNV}(-a,t) P_{XGP} \qquad \text{(Éq 51)}$$

où P_{XGP} est la probabilité pour l'équipe X de *Gagner* en *Prolongation,* telle que donnée à l'Éq 9 (une fois les indices $_E$ et $_D$ remplacées respectivement par $_X$ et $_Y$.)

$$P_{XGP} = (1 - p_{XP0}p_{YP0})p_{XP1} + p_{XP0}p_{YP0}P_{XGF} \qquad \text{(Éq 9)}$$

[(*)] Par convention, l'équipe X sera toujours celle jouant avec un filet vacant et l'équipe Y celle jouant contre un filet vacant.

11. Probabilité de gagner contre un filet vacant

Quand l'équipe Y joue contre un filet vacant, sa probabilité de gagner est

$$P_{YGV}(b,t) = [1 - P_{XNV}(-b,t)]P_{YGP} \qquad \text{(Éq 52)}$$

où b est le nombre de buts d'avance (normalement 1 ou 2) et $P_{XNV}(-b,t)$ est la probabilité que l'équipe X nivelle le compte avec b buts de retard et un filet $Vacant$. Plus explicitement, cette probabilité s'écrit :

$$P_{XNV}(-b,t) = \left(1 - e^{-b\lambda_{XV}^{*}}\right)e^{-\lambda_{YV}^{*}} \,. \qquad \text{(Éq 53)}$$

avec P_{YGP} donnant la probabilité pour l'équipe Y de $Gagner$ en $Prolongation$, telle que définie à l'Éq 9 (une fois les indices $_E$ et $_D$ remplacées respectivement par $_X$ et $_Y$.)

$$P_{YGP} = (1 - p_{YP0}p_{XP0})p_{YP1} + p_{YP0}p_{XP0}P_{YGF} \qquad \text{(Éq 9)}$$

Comme à la section précédente, $\lambda_{XV}^{*} = \lambda_{XV}(1 - t/T)$ et $\lambda_{YV}^{*} = \lambda_{YV}(1 - t/T)$, avec

$$\lambda_{XV} = \tfrac{1}{2}(\lambda_{PXV} + \lambda_{CYV}) \qquad \text{(Éq 54)}$$

et

$$\lambda_{YV} = \tfrac{1}{2}(\lambda_{PYV} + \lambda_{CXV}) \qquad \text{(Éq 55)}$$

qui sont respectivement la *moyenne offensive* de compter un but Par l'équipe X avec son filet $Vacant$ et la *moyenne offensive* de compter un but Par l'équipe Y jouant contre un filet $Vacant$. Les moyennes λ_{PXV}, λ_{CXV}, λ_{PYV}, λ_{CYV} correspondent respectivement aux moyennes de buts comptés Par et $Contre$ l'équipe X quand elle joue avec son filet $Vacant$ et aux moyennes buts comptés Par et $Contre$ l'équipe Y quand elle joue contre un filet $Vacant$.

12. Probabilité de gagner en prolongation

La probabilité $P_{EGP}(t)$ pour l'équipe E de gagner en prolongation est

$$P_{EGP}(t) = [1 - p_{EP}(0,t'')p_{DP}(0,t'')]p_{EP1} + p_{EP}(0,t'')p_{DP}(0,t'')P_{EGF} \qquad \text{(Éq 56)}$$

où

$$p_{EP}(0,t'') = p_{EP0}^{(1-t''/T_P)} \qquad \text{(Éq 57)}$$

$$p_{DP}(0,t'') = p_{DP0}^{(1-t''/T_P)} \qquad \text{(Éq 58)}$$

sont la probabilité pour les équipes E et D respectivement de ne compter aucun but entre le temps t'' (mesuré à partir du début de la période de prolongation, soit $t'' = t - T$) et la fin de la période de prolongation dont la durée $T_P = 300$s. Les probabilités p_{EP1} , P_{EGF} et P_{EGX} sont définies aux Éq 10, 11 et 17 de la Section 3 :

$$p_{EP1} = \frac{1 - p_{EP0}}{(1 - p_{EP0}) + (1 - p_{DP0})} \qquad \text{(Éq 10)}$$

$$P_{EGF} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{3}{r}\binom{3}{s} p_{EF}^{r}\, q_{EF}^{3-r} p_{DF}^{s} q_{DF}^{3-s} + P_{EGX}\sum_{r=0}^{3}\binom{3}{r}^{2} p_{EF}^{r} q_{EF}^{3-r} p_{DF}^{r} q_{DF}^{3-r} \qquad \text{(Éq 11)}$$

$$P_{EGX} = \frac{p_{EF}q_{DF}}{1 - p_{EF}p_{DF} - q_{EF}q_{DF}} \qquad \text{(Éq 17)}$$

13. Probabilité de gagner au début de la période de fusillade

Si le score est toujours égal après la période de prolongation de 5 minutes, l'issue du match se décide alors en *Fusillade*. En commençant avec l'équipe qui joue à *Domicile*, chaque équipe envoie à tour de rôle 3 joueurs qui vont tenter chacun individuellement de compter un but. Si l'égalité persiste après cette première ronde, chaque équipe envoie alors à tour de rôle 1 joueur pour tenter de compter un but et ce, jusqu'à ce que l'égalité soit rompue.

Chaque équipe E et D a une certaine probabilité p_{EF} et p_{DF} de compter un but en *Fusillade*, pondérée par la moyenne défensive adverse, selon les relations déjà données aux Eq 13 et 14 :

$$p_{EF} = \frac{1}{2}(p_{PEF} + p_{CDF}) \quad \text{(Éq 13)}$$

$$p_{DF} = \frac{1}{2}(p_{PDF} + p_{CEF}) \quad \text{(Éq 14)}$$

où p_{PEF} , p_{CEF} , p_{PDF} et p_{CDF} représentent les probabilités statistiques respectives de compter un but *Par* et *Contre* l'équipe E et *Par* et *Contre* l'équipe D, lors d'un tir de *Fusillade*.

Pour alléger l'écriture par la suite, nous avons aussi défini les probabilités

$$q_{EF} = 1 - p_{EF} \quad \text{(Éq 15)}$$

$$q_{DF} = 1 - p_{DF} \quad \text{(Éq 16)}$$

qui sont les probabilités des équipes E et D de ne pas compter de but lors d'un tir de ***Fusillade.***

En début de *Fusillade,* la probabilité P_{EGF} pour l'équipe E de *Gagner* devient :

$$P_{EGF} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=0}^{r-1}\binom{3}{r}\binom{3}{s} p_{EF}^{r}\, q_{EF}^{3-r} p_{DF}^{s} q_{DF}^{3-s} + P_{EGX}\sum_{r=0}^{3}\binom{3}{r}^{2} p_{EF}^{r} q_{EF}^{3-r} p_{DF}^{r} q_{DF}^{3-r} \quad \text{(Éq 11)}$$

où

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \quad \text{(Éq 12)}$$

est la *Combinaison* de *n* objets, *r* à la fois.

Le terme P_{EGX} qui apparaît dans l'Éq 11, est la probabilité que l'équipe *E Gagne* si les 3 premiers tirs en *Fusillade* de chaque côté ont donné un résultat égal. Cette probabilité est égale à :

$$P_{EGX} = p_{EF} q_{DF} \sum_{j=0}^{\infty} (p_{EF} p_{DF} + q_{EF}\, q_{DF})^{j} \quad \text{(Éq 59)}$$

$$P_{EGX} = \frac{p_{EF} q_{DF}}{1 - p_{EF} p_{DF} - q_{EF} q_{DF}} \quad \text{(Éq 18)}$$

La double sommation de l'Éq 11 donne la probabilité pour l'équipe E de gagner lors de la première ronde de 3 tirs en fusillade. La deuxième sommation donne la probabilité que le score soit égal après cette première ronde. Cette dernière probabilité est multipliée ensuite par la probabilité P_{EGX} pour l'équipe E de gagner au-delà des 3 premiers tirs de fusillade.

14. Probabilité de gagner lors des 3 premiers tirs de fusillade

Lors des 3 premiers tirs de fusillade, si l'équipe D a compté b buts après n tirs et l'Équipe E a compté, a buts après m tirs, alors la probabilité $P_{DGF}(n,m;b,a)$ pour l'équipe D de *Gagner* en *Fusillade* est :

$$P_{DGF}(n,m;b,a) = \sum_{r=1-d}^{3-n} \sum_{s=0}^{r-1+d} \binom{3-n}{r}\binom{3-m}{s} p_{DF}^{r}\, q_{DF}^{3-n-r} p_{EF}^{s} q_{EF}^{3-m-s} + \cdots$$
$$+P_{DGX} \sum_{r=0}^{3-n-|d|+b} \binom{3-n}{r+|d|-b}\binom{3-m}{r+|d|-a} p_{DF}^{r+|d|-b} q_{DF}^{3-n-r-|d|+b} p_{EF}^{r+|d|-a} q_{EF}^{3-m-r-|d|+a} \quad \text{(Éq 60)}$$

où $d = b - a$, ($|d|$ étant la valeur absolue de d) ,

$$m = \begin{cases} n-1 & \text{si } E \text{ a un tir de fusillade de moins que } D \\ n & \text{si } E \text{ a autant de tirs de fusillade que } D \end{cases} \quad \text{(Éq 61)}$$

et

$$P_{DGX} = \frac{p_{DF}q_{EF}}{1 - p_{DF}p_{EF} - q_{DF}q_{EF}} . \quad \text{(Éq 62)}$$

Avec

$$\binom{0}{0} \equiv 1 \quad \text{(Éq 63)}$$

et

$$\binom{n}{k} \equiv 0 \quad \text{(Éq 64)}$$

si $k < 0$ ou $k > n$.

La probabilité $P_{EGF}(n,m;b,a)$ pour l'équipe E de *Gagner* lors des 3 premiers tirs de *Fusillade* est complémentaire à $P_{DGF}(n,m,b,a)$, soit :

$$P_{EGF}(m,n;a,b) = 1 - P_{DGF}(n,m;b,a) . \quad \text{(Éq 65)}$$

15. Probabilité de gagner après les 3 premiers tirs de fusillade

Si l'égalité persiste après les 3 premiers tirs de fusillade, alors la probabilité pour l'équipe D de *Gagner* est :

$$P_{DGX} = \frac{p_{DF}q_{EF}}{1 - p_{DF}p_{EF} - q_{DF}q_{EF}}. \tag{Éq 66}$$

En commençant par l'équipe D, les deux équipes vont alors envoyer chacun un joueur effectuer un tir de fusillade jusqu'à ce que l'égalité soit rompue.

Après le premier tir de l'équipe D, la probabilité de *Gagner* devient

$$P_{DGX1} = q_{EF} + p_{EF}\left(\frac{p_{DF}q_{EF}}{1 - p_{DF}p_{EF} - q_{DF}q_{EF}}\right). \tag{Éq 67}$$

si elle a compté un but, ou

$$P_{DGX0} = q_{EF}\left(\frac{p_{DF}q_{EF}}{1 - p_{DF}p_{EF} - q_{DF}q_{EF}}\right). \tag{Éq 68}$$

si elle n'a pas compté de but.

Après le premier tir de l'équipe E, la probabilité de *Gagner* de l'équipe D devient

$$P_{DGX10} = 1 \tag{Éq 69}$$

si l'équipe E n'a pas marqué, ou

$$P_{DGX11} = P_{DGX} = \left(\frac{p_{DF}q_{EF}}{1 - p_{DF}p_{EF} - q_{DF}q_{EF}}\right). \tag{Éq 70}$$

si l'équipe E a recréé l'égalité.

De même

$$P_{DGX00} = P_{DGX} = \left(\frac{p_{DF}q_{EF}}{1 - p_{DF}p_{EF} - q_{DF}q_{EF}}\right). \tag{Éq 71}$$

si aucune des équipes n'a marqué, et

$$P_{DGX01} = 0 \tag{Éq 72}$$

si l'équipe E a compté un but après que l'équipe D eut raté son tir.

Si les conditions liées aux Éq 70 et 71 prévalent, le cycle reprend à partir de l'Éq 66 jusqu'à ce qu'à ce que les conditions liées aux Éq 69 ou 72 soient atteintes.

Annexe 1. Données statistiques employées

Différentes moyennes de buts comptés :

Symbole	Définition	LNH
λ_{PE}	*Par* l'équipe qui joue à l'*Extérieur* à 5 contre 5	
λ_{CE}	*Contre* l'équipe qui joue à l'*Extérieur* à 5 contre 5	
λ_{PD}	*Par* l'équipe qui joue à *Domicile* à 5 contre 5	
λ_{CD}	*Contre* l'équipe qui joue à *Domicile* à 5 contre 5	
λ_{PX44}	*Par* l'équipe X qui joue à 4 contre 4	
λ_{CX44}	*Contre* l'équipe X qui joue à 4 contre 4	
λ_{PY44}	*Par* l'équipe Y qui joue à 4 contre 4	
λ_{CY44}	*Contre* l'équipe Y qui joue à 4 contre 4	
λ_{PX33}	*Par* l'équipe X qui joue à 3 contre 3	
λ_{CX33}	*Contre* l'équipe X qui joue à 3 contre 3	
λ_{PY33}	*Par* l'équipe Y qui joue à 3 contre 3	
λ_{CY33}	*Contre* l'équipe Y qui joue à 3 contre 3	
λ_{PX65}	*Par* l'équipe X qui joue à 6 contre 5 (avec filet vacant)	
λ_{CX65}	*Contre* l'équipe X qui joue à 6 contre 5 (avec filet vacant)	
λ_{PY56}	*Par* l'équipe Y qui joue à 5 contre 6 (contre filet vacant)	
λ_{CY56}	*Contre* l'équipe Y qui joue à 5 contre 6 (contre filet vacant)	

Différentes probabilités de ne compter aucun but :

Symbole	Définition	LNH
p_{XP0}	en *Prolongation* (de 300s) pour l'équipe qui joue à l'*Extérieur*	
p_{YP0}	en *Prolongation* (de 300s) pour l'équipe qui joue à *Domicile*	
p_{X054}	en *Supériorité* numérique (de 120s) à 5 contre 4, pour l'équipe X	
p_{Y045}	en *Infériorité* numérique (de 120s) à 4 contre 5, pour l'équipe Y	
p_{X053}	en *Supériorité* numérique (de 120s) à 5 contre 3, pour l'équipe X	
p_{D053}	en *Supériorité* numérique (de 120s) à 5 contre 3, pour l'équipe Y	
p_{E035}	en *Infériorité* numérique (de 120s) à 3 contre 5, pour l'équipe X	
p_{D035}	en *Infériorité* numérique (de 120s) à 3 contre 5, pour l'équipe Y	

Différentes probabilités de compter un but :

Symbole	Définition	LNH
p_{PEF}	*Par* l'équipe E en *Fusillade*	
p_{CEF}	*Contre* l'équipe E en *Fusillade*	
p_{PDF}	*Par* l'équipe D en *Fusillade*	
p_{CDF}	*Contre* l'équipe D en *Fusillade*	

Annexe 2. Constantes, variables, moyennes et fonctions employées

Constantes

Symbole	Définition	Nº Éq
T	3600 s. : Durée normale d'un match sans prolongation	
T_X	120 s. : Durée d'une pénalité mineure	
T_Y	300 s. : Durée d'une pénalité majeure	
T_P	300 s. : Durée d'une prolongation	

Variables

Symbole	Définition	Nº Éq
t	Temps écoulé en secondes depuis le début du match	
t'	Temps écoulé en secondes depuis le début d'une pénalité	
t''	Temps écoulé en secondes depuis le début de la prolongation	
t_X	Temps au début d'une pénalité	

Moyennes calculées

Symbole	Définition	Nº Éq
λ_E	M. offensive de l'équipe E	3
λ_D	M. offensive de l'équipe D	4

Probabilités calculées

Symbole	Définition	Nº Éq
$p(\lambda, k)$	P. de compter k buts avec une moyenne λ	1
$p_E(\lambda_E, k, t)$	P. pour l'équipe E de compter k buts, entre t et T, avec une moyenne λ_E	2
$p_D(\lambda_D, k, t)$	P. pour l'équipe D de compter k buts, entre t et T, avec une moyenne λ_D	5
$P_{EGR}(0, t)$	P. au temps t pour l'équipe E de *Gagner* avec une formation *Régulière*	7